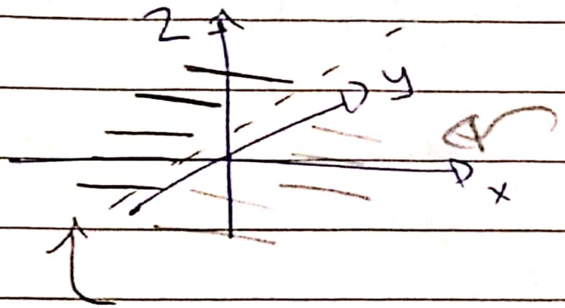
12/10/20

Επανάληψη - συνέχεια του παραδ. της τελευταίας φοράς: $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}1, & x<0\\ 0, & x\geq 0\end{cases}$



Σ' αυτό το τμήμα του πεδίου ορισμού (δηλ. το σύνολο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\geq 0\}$ έχουμε $f(x,y)=0$ $(=[0,+\infty)\times\mathbb{R})$

Σ' αυτό το τμήμα του πεδίου ορισμού (δηλ. το σύνολο $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x<0\}$ $(=\{(-\infty,0)\times\mathbb{R}\})$) έχουμε $f(x,y)=1$

- Είδαμε ότι σε κάθε σημείο (x_0,y_0) με $x_0=0$ η f είναι ασυνεχής (= μη συνεχής)

Ακόμα στο (x_0,y_0) με $x_0=0$ η f **δεν** έχει όριο αφού **δεν** ισχύει το εξής:

$\exists\, a\in\mathbb{R}$ $\forall\, (x_\nu,y_\nu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(x_0,y_0)\}$ με $(x_\nu,y_\nu)\to(x_0,y_0)$, $\nu\to+\infty$: $\underbrace{f(x_\nu,y_\nu)}_{\text{ακολουθία στο } \mathbb{R}}\to a$ $\left[\Leftrightarrow : \lim_{(x_\nu,y_\nu)\to(0,0)} f(x,y) = a\right]$

και τότε το α λέγεται όριο της f στο σημείο (x_0, y_0) ή η f συγκλίνει στο α στο σημείο (x_0, y_0)

Πράγματι: $\left(x_0 - \frac{1}{\nu}, y_0\right) \to (x_0, y_0)$

$$\underbrace{\text{από } \left\| \left(x_0 - \frac{1}{\nu}, y_0\right) - (x_0, y_0) \right\| =}_{\Leftrightarrow}$$

$= \frac{1}{\nu} \xrightarrow{\nu \to \infty} 0$. Επίσης:

$$f\left(x_0 - \frac{1}{\nu}, y_0\right) = 1 \xrightarrow{\nu \to \infty} 1$$

Ενώ $\left(x_0 + \frac{1}{\nu}, y_0\right) \xrightarrow{\nu \to +\infty} (x_0, y_0)$ [Αυτό συμβαίνει επειδή: ΟΡΙΣΜΟΣ σκ

$$\left\| \left(x_0 + \frac{1}{\nu}, y_0\right) - (x_0, y_0) \right\| \underset{\text{του.}}{\overset{\text{ορισμός}}{=}} \left\| \left(\frac{1}{\nu}, 0\right) \right\| =$$

ορισμός της ευκλείδειας νόρμας

$$= \left(\left(\frac{1}{\nu}\right)^2 + 0^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{\nu} \to 0$$

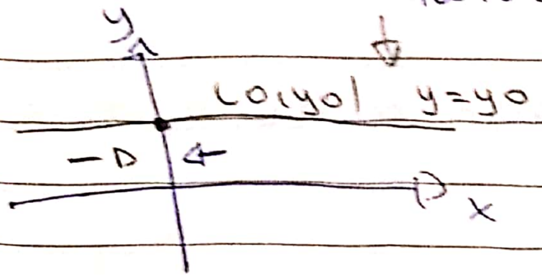
και:

$$f\left(x_0 + \frac{1}{\nu}, y_0\right) = 0 \xrightarrow{\nu \to \infty} 0$$

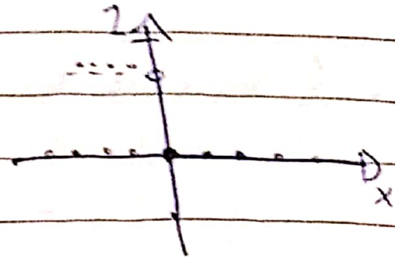
Άρα για 2 διαφορετικές ακολουθίες που συγκλίνουν στο (x_0, y_0), οι αντίστοιχες ακολουθίες τιμών συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια (εδώ: το 1 και το 0)

! Εγώ θέλω να υπάρχει ένα α έτσι ώστε όλες οι ακολουθίες να συγκλίνουν στο α !

Πεδίο ορισμού



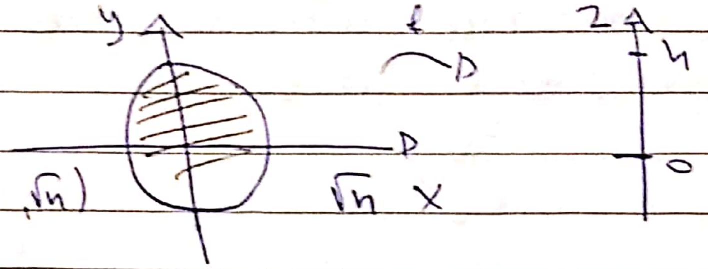
$\boxed{y = y_0}$

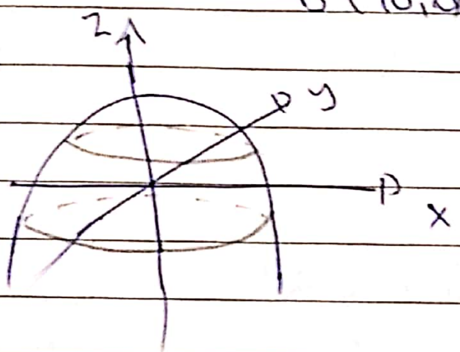


<u>Άσκ. 18</u>. $f: \bar{B}((0,0), \sqrt{h}) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :$ ορισμός $x^2+y^2 \leq (\sqrt{h})^2 = h\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = h - (x^2+y^2)$ (≥ 0)

($h > 0$ σταθερό)

$\bar{B}((0,0), \sqrt{h})$

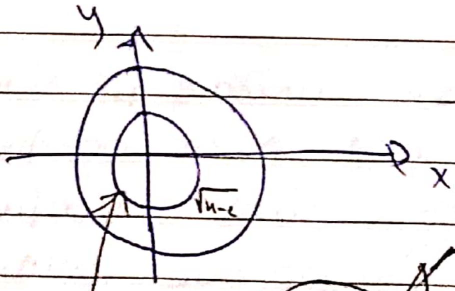




<u>Καμπύλες στάθμης</u> $c \in \mathbb{R}$: $L_f(c) = \{(x,y) \in \bar{B}((0,0), \sqrt{h}) : f(x,y) = c\}$

- $c > h$: $L_f(c) = \emptyset$
- $c = h$: $L_f(c) = \{(0,0)\}$
- $c \in [0,h)$, $L_f(c) = \{(x,y) \in \bar{B}((0,0), \sqrt{h}) : h - c = x^2+y^2\}$
  $h - c > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{h-c}$



$x^2+y^2 = h-c$

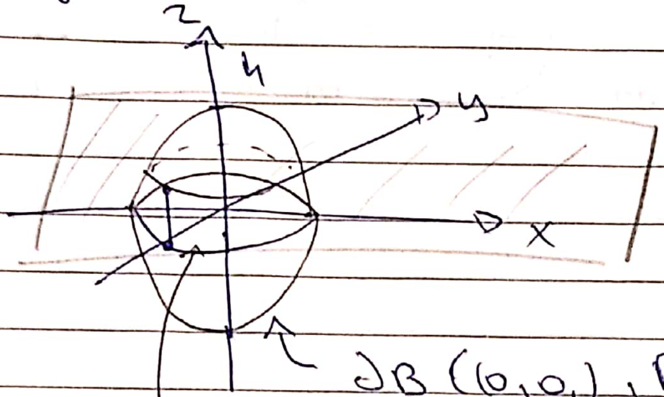
$\to$ ο κύκλος αυτός είναι η καμπύλη στάθμης $c \in [0,h]$ της $f: B((0,0), \sqrt{h}) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = h - (x^2+y^2)$, διότι σ'αυτά τα σημεία (τα σημεία του κύκλου) και μόνο η f παίρνει την τιμή c

: $f(x,y) = c$ (*) αφού γι' αυτά τα σημεία έχω:

$f(x,y) = h - (h-c) = c$

$x^2+y^2 = h-c$

Σχόλιο ①: Στα σημεία του κύκλου η συνάρτηση έχει την τιμή c, δηλ. τα σημεία του γραφήματος της f που αντιστοιχούν στα σημεία του κύκλου είναι αυτά που προκύπτουν απ' την τομή του γραφήματος με το επίπεδο $z = c$



$\partial B((0,0),\sqrt{h}) \subset \mathbb{R}^2$

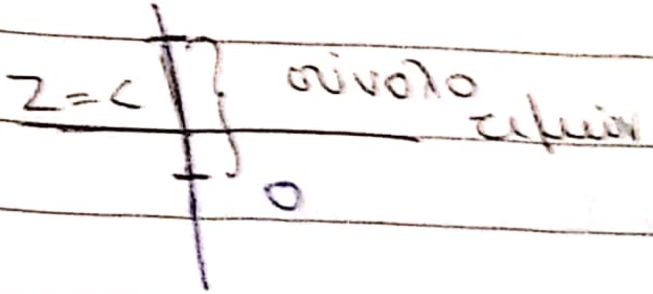
$\partial B((0,0),\sqrt{h-c}) \subset \mathbb{R}^2$ ("σημεία του διδιάστατου χάρτη")

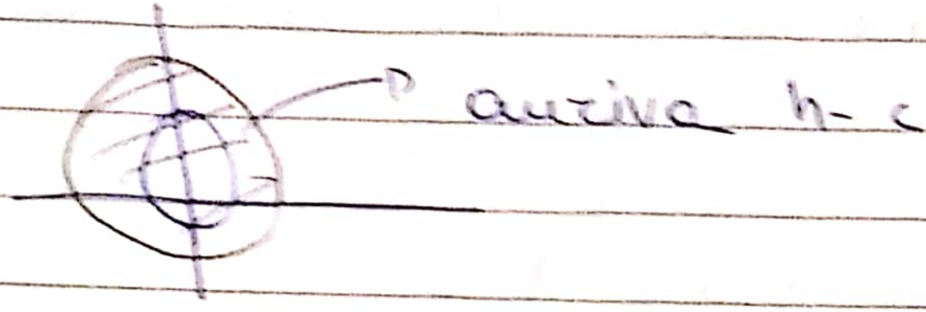
$\{((x,y),c) : (x,y) \in \partial B((0,0),\sqrt{h-c})\}$ ("σημεία του γραφήματος")

↑ Αν η f περιέγραφε βουνό οι καμπύλες (x,y,c), $(x,y) \in \partial B((0,0),\sqrt{h-c})$ έχουν ύψος $z=c$

Σχόλιο ②: Παίρνοντας κύκλους με διαφορετικές ακτίνες στο πεδίο ορισμού, οι τιμές της f αλλάζουν ύψος $z=c$, δηλ. κινούμαστε σε τομές του γραφήματος με διαφορετικά επίπεδα

Σχόλιο 3 Έτσι "πιάνω" όλο το γράφημα αν επιλύσω όλες τις καμπύλες στάθμης





Αν το "καλοσκεφτούμε" η καμπύλη στάθμης $c\in\mathbb{R}$ μιας $f: U \to \mathbb{R}$ με $U \subset \mathbb{R}^2$ είναι η αντίστροφη εικόνα της τιμής c υπό την f

$L_f(c) \overset{\text{ορσ}}{=} \{(x,y)\in U: f(x,y)=c\} = f^{-1}(\{c\})$

αφού $f^{-1}(\{c\}) :\underset{\text{ορσ}}{=} \{(x,y)\in U: f(x,y)=c\}$